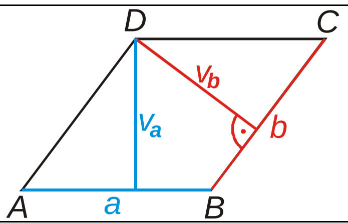
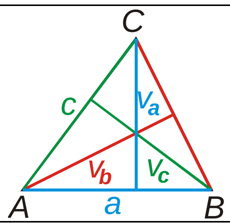
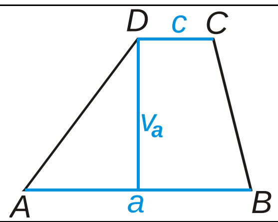
2.7.10 Obsahy - opakování

Předpoklady: 020709

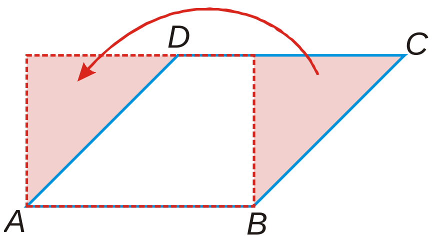
Př. 1: Vypiš vedle sebe vzorce pro obsah rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku. Každý ve všech variantách. Ke každému vzorci nakresli obrázek s vyznačenými rozměry, které ve vzorci vystupují. Čím je dán počet variant každého vzorce?

Rovnoběžník $S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$	Trojúhelník $S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$	Lichoběžník $S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$
		

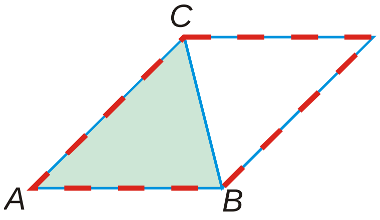
Čím větší je počet výšek v útvaru, tím větší je počet variant vzorce.
Trochu jinak:

- v trojúhelníku jsou tři strany, které můžeme považovat za základny, každá s odpovídající výškou $\Rightarrow$ tři varianty vzorce,
- v rovnoběžníku jsou dvě dvojice stran, každá dvojice s výškou $\Rightarrow$ dvě varianty vzorce,
- v lichoběžníku je jedna dvojice rovnoběžných stran s výškou $\Rightarrow$ jedna varianta vzorce.

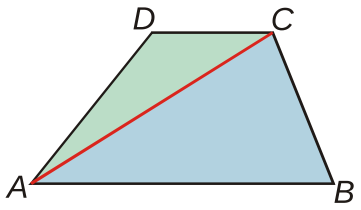
Př. 2: Nakresli obrázky trojúhelníku, lichoběžníku a rovnoběžníku, které znázorňují, jak jsme objevili příslušný vzorec pro výpočet obsahu. Který ze vzorců jsme objevili jako první, který jako poslední?



Jako první jsme odvodili vzorec pro obsah rovnoběžníků tím, že jsme rovnoběžník převedli na obdélník.



Jako druhý jsme odvodili vzorec pro obsah trojúhelníku tím, že jsme trojúhelník doplnili na rovnoběžník.



Jako poslední jsme odvodili vzorec pro obsah lichoběžníku tím, že jsme lichoběžník rozdělili na dva trojúhelníky.

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu je třeba zakázat kalkulačky, aby byl splněn cíl zopakovat zlomky.

Př. 3: Urči obsah lichoběžníku, jehož základny mají velikost $\frac{3}{4}\text{m}$ a $1\frac{1}{3}\text{m}$ a výška $\frac{3}{5}\text{m}$.

Dosadíme do vzorce:

$$S=\frac{\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{3}{5}}{2}\text{m}^2=\frac{\left(\frac{3\cdot 3+4\cdot 4}{12}\right)\cdot\frac{3}{5}}{2}=\text{m}^2\,\frac{\frac{25}{12}\cdot\frac{3}{5}}{2}=\frac{\frac{5\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3}{5}}{2}\text{m}^2=\frac{\frac{5}{4}}{2}\text{m}^2=\frac{5}{4\cdot 2}\text{m}^2=\frac{5}{8}\text{m}^2$$

Zadaný lichoběžník má obsah $\frac{5}{8}\text{m}^2$.

Př. 4: Vyjádři ze vzorce pro obsah lichoběžníku $S=\frac{(a+c)v}{2}$:

a) výšku *v*, b) délku základny *c*.

Výsledek bodu b) požij k sestavení vzorce pro základnu *a* (bez odvozování). K čemu mohou být získané vztahy dobré?

a) výška *v*

$$S=\frac{(a+c)v}{2} \quad /\cdot 2$$

$$2S=(a+c)v \quad /:(a+c)$$

$$v=\frac{2S}{a+c}$$

b) délka základny *c*

$$S=\frac{(a+c)v}{2} \quad /\cdot 2$$

$$2S=(a+c)v \quad /:v$$

$$\frac{2S}{v}=a+c \quad /-a$$

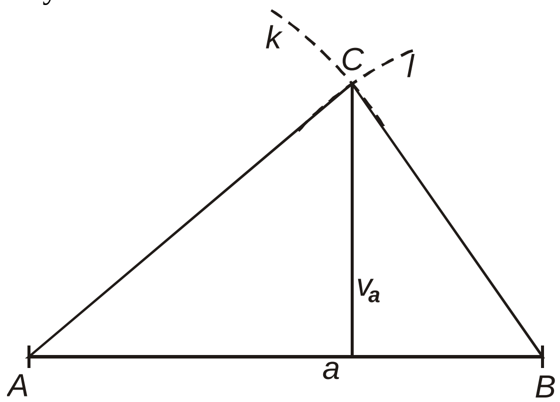
$$c=\frac{2S}{v}-a$$

Základny *a* a *c* hrají v lichoběžníku stejnou roli, můžeme je zaměňovat (nezáleží, kterou označíme *a* a kterou *c*) $\Rightarrow$ můžeme je navzájem prohazovat i ve všech vzorcích $\Rightarrow$

$$a=\frac{2S}{v}-c.$$

Př. 5: Trojúhelníkový pozemek má strany o délkách 56 m, 68 m a 44 m. Jaká je jeho plocha?

Pro výpočet obsahu trojúhelníku potřebujeme délku jedné strany a odpovídající výšky, známe pouze délky všech tří stran $\Rightarrow$ narýsujeme trojúhelník (zmenšený 1000 krát) a změříme jednu z výšek.



Velikosti $a = 68\text{ m}$, $v_a = 38\text{ m}$.

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{68 \cdot 38}{2}\text{ m}^2 = 1292\text{ m}^2$$

Plocha pozemku je 1292 m^2.

Př. 6: Urči, o kolik procent ses zmýlil při řešení předchozího příkladu. Správnou hodnotu Ti řekne učitel.

Správná hodnota $1227\,\text{m}^2$.

1227	…	100 %
1292	…	x

$$\frac{x}{1292} = \frac{100}{1227} \Rightarrow x = \frac{100}{1227} \cdot 1292 = 105,3$$

Při řešení předchozího příkladu jsme se spletli o 5,3 %.

Př. 7: Kosočtverec má výšku 0,5 m a obvod 2,8 m. Urči jeho obsah.

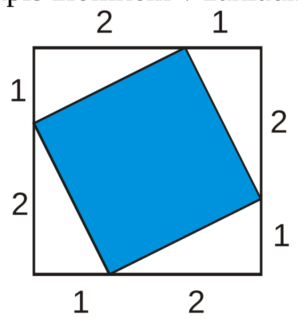
Kosočtverec patří mezi rovnoběžníky $\Rightarrow$ vzorec $S = a \cdot v_a$ $\Rightarrow$ potřebujeme délku strany.

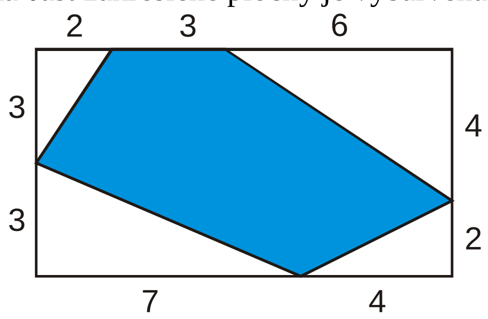
Kosočtverec má čtyři stejné strany $\Rightarrow$ jedna strana je čtvrtina obvodu $\Rightarrow$ $a = 2,8 : 4\,\text{m} = 0,7\,\text{m}$

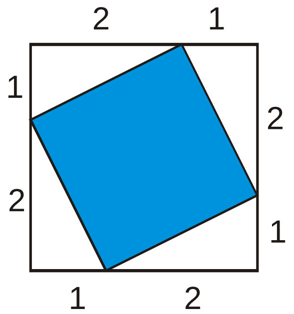
$S = a \cdot v_a = 0,7 \cdot 0,5\,\text{m}^2 = 0,35\,\text{m}^2$

Kosočtverec má obsah $0,35\,\text{m}^2$.

Př. 8: Zapiš zlomkem v základním tvaru jaká část zakreslené plochy je vybarvena.

a) 

b) 



a)

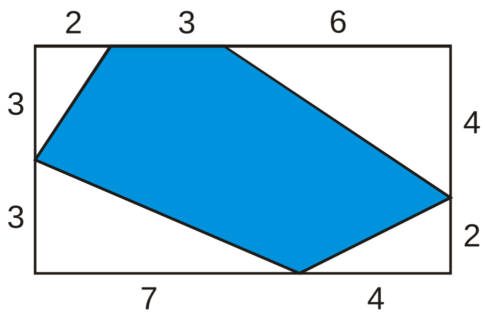
Obsah celého čtverce $S_c = a^2 = 3^2 = 9$.

Obsah vybarveného čtverce určit neumíme (neznáme délku jeho strany) $\Rightarrow$ zkusíme určit plochu zbytků (pravoúhlé trojúhelníky).

$$S_z = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 4$$

Obsah vybarveného čtverce: $S = S_c - S_z = 9 - 4 = 5$.

Vybarvená část zabírá $\frac{5}{9}$ celé plochy.



b)

Obsah celého obdélníku $S_c = ab = 6 \cdot 12 = 72$.

Rovnou určujeme plochu zbytků (čtyři pravoúhlé trojúhelníky):

$$S_z = \frac{3 \cdot 7}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = \frac{21}{2} + 3 + 12 + 4 = \frac{21}{2} + 19 = \frac{59}{2}$$

Obsah vybarveného obrazce: $S = S_c - S_z = 72 - \frac{59}{2} = \frac{144 - 59}{2} = \frac{85}{2}$.

Vybarvená část zabírá $\frac{\frac{85}{2}}{72} = \frac{85}{144}$ celé plochy.

Pedagogická poznámka: Pokud se bavíte o tom, že v bodě a) není možné určit stranu čtverce, může se stát, že se objeví někdo, kdo se po její velikosti začne pídit po určení obsahu čtverce (začne hledat číslo, jehož druhá mocnina je 5). Je možné ho nechat bádat, ale ze zbytkem třídy tento problém neřešíme.

Př. 9: Lichoběžník má obsah $24\,\text{cm}^2$. Urči jeho základny, jestliže má výšku 6 cm a jedna základna je o 2 cm větší než druhá.

Vzorec pro obsah lichoběžníku: $S=\frac{(a+c)v}{2}$.

Je jedno, jak si strany označíme, budeme například předpokládat, že strana *a* je delší $\Rightarrow$ $a=c+2$.

Dosadíme do vzorce: $S=\frac{(a+c)v}{2}=\frac{(c+2+c)v}{2}=\frac{(2c+2)v}{2}$.

Nyní již můžeme vypočítat *c* (*S* i *v* známe): $S=\frac{(2c+2)v}{2}$ $\quad /\cdot 2$

$2S=(2c+2)v \quad /:v$

$\frac{2S}{v}=2c+2 \quad /:2$

$\frac{S}{v}=c+1 \quad /-1$

$c=\frac{S}{v}-1=\frac{24}{6}-1=4-1=3$

Délka delší strany: $a=c+2=3+2=5$.

Základny lichoběžníku mají délky 3 cm a 5 cm.

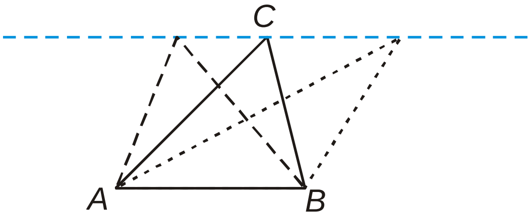
Pedagogická poznámka: V řešení není provedeno vykrácení zlomku $\frac{(2c+2)v}{2}$, protože žáci ještě neumí vytýkat před závorku a celá úprava je pro ně naprosto neprůhledná.

Dodatek: Příklad je možné řešit i dosazením hodnot ze zadání do vzorce $S=\frac{(2c+2)v}{2}$ a pak klasickým řešením rovnice.

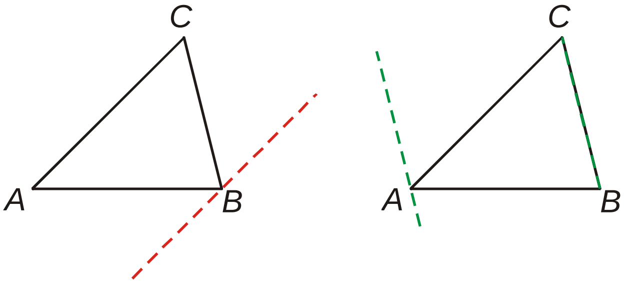
Dodatek: Příklad se dá řešit i úvahou. Platí vzorec $S=24=\frac{(a+c)v}{2}$ $\Rightarrow$ pro součin $(a+c)v$ platí: $(a+c)v=48$, pro součet $(a+c)$ pak $a+c=8$. Hledáme tedy dvě čísla, jejichž součet je 8 a jedno je o dvě větší než druhé $\Rightarrow$ hledaná čísla jsou 3 a 5.

Pedagogická poznámka: Pokud někdo přijde s řešením uvedeným v dodatku, je dobré ukázat, že jde ve skutečnosti o provádění ekvivalentních úprav na rovnici – cesta je tedy podobná jen vyžaduje větší představivost.

Př. 10: Načrtni obecný trojúhelník *ABC*. Dokresli do obrázku body, do kterých můžeme posunout vrchol *C*, aniž by se obsah trojúhelníku změnil. Nakresli jinou barvou do jiných obrázků podobné body pro vrcholy *A* a *B*.



Vrchol *C* můžeme posunovat po rovnoběžce se stranou *AB*, která jím prochází. Nezmění se tak výška v_c a tím ani obsah trojúhelníku.



Podobně pro další strany.

Př. 11: (BONUS pro zájemce) Správná hodnota obsahu pozemku z příkladu 5 byla určena pomocí vzorce, který se ve škole neprobírá. Najdi tento vzorec a zkontroluj hodnotu od učitele.

Herónův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

$a = 56\,\text{m}$, $b = 68\,\text{m}$, $c = 44\,\text{m}$ $\Rightarrow$ $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{56+68+44}{2} = \dfrac{168}{2} = 84$

Dosazení je jasné, problémem je divná stříška přikrývající vzorec (druhá odmocnina), naštěstí ji máme na kalkulačce.

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{84(84-56)(84-68)(84-44)}\,\text{m}^2 \doteq 1227\,\text{m}^2$

Pozemek má rozlohu $1227\,\text{m}^2$.

Shrnutí: Vzorce pro obsahy rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku jsou si velmi podobné a vycházejí ze vzorce pro obsah obdélníku.